DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)** à **5)** suivantes sont indépendantes.

1) Soient E un ensemble et f, g et h trois applications de E dans E. On suppose que $f\circ g$ est injective, que $g\circ h$ est surjective et que $f\circ g\circ h = g$. Montrer que f, g et h sont bijectives.

2) Étant donnés deux ensembles E et F et une application $f : E \longrightarrow F$, on dira que f est *presque 2-surjective* (*de E sur F*) si tout élément de F, sauf peut-être un, possède au moins deux antécédents par f.

Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer que si f et g sont presque 2-surjectives, $g\circ f$ l'est aussi.

3) Combien le mot LIBELLULE possède-t-il d'anagrammes ne contenant jamais deux consonnes consécutives ni deux voyelles consécutives ?

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il de couples (A,B) de parties de $[\![1,n]\!]$ pour lesquels $A\cup B = [\![1,n]\!]$?

5) Pour tout ensemble fini E, on appelle *involution de E* toute application $\sigma : E\longrightarrow E$ pour laquelle $\sigma^2 = \mathrm{Id}_E$ et on note $i(E)$ le nombre d'involutions de E.

a) Soient E et F deux ensembles finis et φ une bijection de E sur F. Montrer que pour toute involution σ de E, $\varphi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}$ est une involution de F. En déduire que $i(E) = i(F)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on peut ainsi noter i_n le nombre d'involutions d'un ensemble fini quelconque de cardinal n. On pose aussi $i_0 = i(\varnothing) = 1$.

b) Calculer i_1, i_2 et i_3.

c) En s'intéressant à la valeur de $\sigma(n+2)$ pour une involution σ de $[\![1,n+2]\!]$, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $i_{n+2} = i_{n+1} + (n+1)\,i_n$.

d) **(Plus difficile)** Prouver sans calcul, de façon purement combinatoire, que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad i_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k}\frac{(2k)!}{2^k\,k!}$.

---

2 Les questions **1)** et **2)** suivantes sont indépendantes.

1) a) Étudier pour tout $a>0$ la limite en $+\infty$ de la fonction $x\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{ch}(ax)}}$.

b) Étudier la limite en 0 de la fonction $x\longmapsto \dfrac{\ln(1+2x)}{\sin\left(x+x^2\right)-x^2}$, dont on admet qu'elle est définie au voisinage de 0.

2) On souhaite montrer que pour tout $x\in\,]0,1]$: $\quad \mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Arccos}\,(2x-1)\quad \bigstar$.

a) Simplifier $\cos\left(2\,\mathrm{Arctan}\,t\right)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, puis démontrer $\bigstar$.

b) Redémontrer $\bigstar$ en étudiant courageusement une fonction.

---

3 **1)** Soient $f : \mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que $f(0) = g(0) = 0$ et que $\left|f'(x)\right|\leqslant g'(x)$ pour tout $x\geqslant 0$. Étudier le signe des fonctions $f+g$ et $g-f$ sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire que pour tout $x\geqslant 0$: $\quad \left|f(x)\right|\leqslant g(x)$.

On définit deux suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}_+$ en posant pour tout $x\geqslant 0$: $\quad P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$, $\quad P_1(x) = x \quad$ et $\quad Q_1(x) = 1$, $\quad$ puis pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$P_{n+2}(x) = (2n+3)\,P_{n+1}(x) + x^2\,P_n(x) \qquad \text{et} \qquad Q_{n+2}(x) = (2n+3)\,Q_{n+1}(x) + x^2\,Q_n(x).$$

2) a) Montrer que les coefficients des fonctions polynomiales P_n et Q_n sont des entiers naturels pour tout $n\in\mathbb{N}$ et que P_n et Q_n sont de degré au plus n.

b) Calculer $P_n(0)$ et $Q_n(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis montrer que Q_n est minorée par $\dfrac{(2n)!}{2^n\,n!}$ sur $\mathbb{R}_+$.

On pose $f_n(x) = Q_n(x)\,\mathrm{sh}\,x - P_n(x)\,\mathrm{ch}\,x$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\geqslant 0$, de sorte que $f_{n+2}(x) = (2n+3)\,f_{n+1}(x) + x^2\,f_n(x)$.

3) **a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $\quad f_{n+1}'(x) = -x\, f_n(x)$.

b) En déduire que f_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que pour tout $x > 0$: $\quad |f_n(x)| > 0$.

4) On pose $g_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2^n\, n!} \operatorname{sh} x$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $\quad x\, g_n(x) \leqslant g_{n+1}'(x)$.

b) En déduire que $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, puis que pour tout $x > 0$:

$$0 < \left| \operatorname{th} x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

5) Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Pour montrer que $\operatorname{th} r$ est irrationnel, on raisonne par l'absurde en le supposant rationnel. Ainsi, $\operatorname{th} r = \dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 < |p\, Q_n(r) - q P_n(r)| \leqslant \dfrac{p\, r^{2n}}{2^n\, n!}$.

b) En déduire une contradiction.

6) En déduire que e^r est irrationnel pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$. Que peut-on dire du logarithme d'un rationnel strictement positif ?

———————————————